<==Back

Булевы Функции

- Основные понятия.
- Аналитическое представление булевых функций.
- Функционально полные системы будевых функций.
- Минимизация булевых функций.
  - **Метод Квайна.**
  - Метод Квайна - Мак-Класки.
  - Метод Блейка - Порецкого.
  - Метод диаграмм Вейча.
  - Минимизация коньюнктивных нормальных форм.
  - Метод Петрика.
  - Минимизация частично определенных булевых функций.
- Минимизация систем булевых функций.

Метод Квайна.

"Метод Квайна основывается на применении двух основных соотношений.

1. Соотношение склеивания
   $$Ax \vee A/x = A(x \vee /x) = A,$$
   где A - любое элементарное произведение.
2. Соотношение поглощения
   $$Ax \vee A = A(x \vee 1) = A.$$

Справедливость обоих соотношений легко проверяется. Суть метода заключается в последовательном выполнении всех возможных склеиваний и затем всех поглощений, что приводит к сокращенной ДНФ. Метод применим к совершенной ДНФ. Из соотношения поглощения следует, что произвольное элементарное произведение поглощается любой его частью.

Для доказательства достаточно показать, что произвольная простая импликанта $p = x_{i1}x_{i2} \dots x_{in}$ может быть получена. В самом деле, применяя к p операцию развертывания (обратную операции склеивания):

$$A = A\ (x\ v\ /x) = Ax\ v\ A/x$$

по всем недостающим переменным $x_{i^{\wedge}(k+l)}, \dots, X_{i^{\wedge}n}$ исходной функции f, получаем совокупность S конституент единицы. При склеивании всех конституент из S получим импликанту p. Последнее очевидно, поскольку операция склеивания обратна операции развертывания. Множество S конституент обязательно присутствует в совершенной ДНФ функции f поскольку p - ее импликанта.

Таблица 4.1.1

$x_4x_3x_2x_1$	f
0000	0
0001	1
0010	0
0011	1
0100	0
0101	1
0110	0
0111	1
1000	0
1001	0
1010	0
1011	0
1100	0
1101	0
1110	1
1111	1

Пример. Пусть имеется булева функция, заданная таблицей истинности (табл. 9.1.1). Ее СДНФ имеет вид

$$f = /x_1/x_2/x_3x_4 \text{ v } /x_1/x_2x_3x_4 \text{ v } /x_1x_2/x_3x_4 \text{ v } /x_1x_2x_3x_4 \text{ v } x_1x_2x_3/x_4 \text{ v } x_1x_2x_3x_4.$$

Для удобства изложения пометим каждую конституенту единицы из СДНФ функции f каким-либо десятичным номером (произвольно). Выполняем склеивания. Конституента 1 склеивается только с конституентой 2 (по переменной x_3) и с конституентой 3 (по переменной x_2), конституента 2 с конституентой 4 и т. д. В результате получаем

$$1 - 2: /x_1/x_2x_4;$$
$$1 - 3: /x_1/x_3x_4;$$
$$2 - 4: /x_1x_3x_4;$$
$$3 - 4: /x_1x_2x_4;$$
$$4 - 6: x_2x_3x_4;$$
$$5 - 6: x_1x_2x_3.$$

Заметим, что результатом склеивания является всегда элементарное произведение, представляющее собой общую часть склеиваемых конституент Далее производим склеивания получаемых элементарных произведений.
Склеиваются только те произведения, которые содержат одинаковые переменные. Имеет место два случая склеивания:

$$/x_1/x_2x_4 \text{ v } /x_1x_2x_4 = /x_1x_4;$$
$$/x_1/x_3x_4 \text{ v } /x_1x_3x_4 = /x_1x_4,$$

с появлением одного и того же элементарного произведения $/x_1x_4$. Дальнейшие склеивания невозможны.
Произведя поглощения (из полученной ДНФ вычеркиваем все поглощаемые элементарные произведения), получим сокращенную ДНФ:

$$x_2x_3x_4 \vee x_1x_2x_3 \vee /x_1x_4.$$

Переходим ко второму этапу. Для получения минимальной ДНФ необходимо убрать из сокращенной ДНФ все лишние простые импликанты. Это делается с помощью специальной импликантной матрицы Квайна. Строки такой матрицы отмечаются простыми импликантами булевой функции, т. е. членами сокращенной ДНФ, а столбцы - конституентами единицы, т. е. членами СДНФ булевой функции.
Пример (продолжение). Импликантная матрица имеет вид (табл. 4.1.2).

Таблица 4.1.2

Простые импликанты	Конституенты единицы					
	$/x_1/x_2/x_3x_4$	$/x_1/x_2x_3x_4$	$/x_1x_2/x_3x_4$	$/x_1x_2x_3x_4$	$x_1x_2x_3/x_4$	$x_1x_2x_3x_4$
$/x_1x_4$	**X**	**X**	**X**	**X**		
$x_2x_3x_4$				**X**		**X**
$x_1x_2x_3$					**X**	**X**

Как уже отмечалось, простая импликанта поглощает некоторую конституенту единицы, если является ее собственной частью. Соответствующая клетка импликантной матрицы на пересечении строки (с рассматриваемой простой импликантой) и столбца (с конституентой единицы) отмечается крестиком (табл. 9.1.2). Минимальные ДНФ строятся по импликантной матрице следующим образом:

1. ищутся столбцы импликантной матрицы, имеющие только один крестик. Соответствующие этим крестикам простые импликанты называются базисными и составляют так называемое ядро булевой функции. Ядро обязательно входит в минимальную ДНФ.
2. рассматриваются различные варианты выбора совокупности простых импликант, которые накроют крестиками остальные столбцы импликантной матрицы, и выбираются варианты с минимальным суммарным числом букв в такой совокупности импликант.

Пример (продолжение). Ядром нашей функции являются импликанты $x_1x_2x_3$; $/x_1x_4$. Импликанта $x_2x_3x_4$ - лишняя, так как ядро накрывает все столбцы импликантной матрицы. Поэтому функция имеет единственную тупиковую и минимальную ДНФ:

$$f = x_1x_2x_3 \text{ v } /x_1x_4$$

Следует отметить, что число N крестиков в одной строке всегда является степенью 2. Более того, читатель может легко убедиться в том, что

$$N = 2^{n-k}$$

где k - число букв, содержащихся в простой импликанте.
Заметим также, что используя различные соотношения, можно расширить область применения метода Квайна за пределы совершенной ДНФ."

Использованная литература:

1) "Прикладная теория цифровых автоматов" Киев "Вища Школа" 1987
К.Г. Самофалов, А.М. Романкевич, В.Н. Валуйский,
Ю.С. Каневский, М.М. Пиневич
страницы (197 - 199).